OPCIÓN A

1.- Consideremos la función $f(x)=\ln(x-1)$ definida en el intervalo **[2, e+1]**. Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva $y=\ln(x-1)$ que sea paralela a la recta que pasa por los puntos **P(2,0)** y **Q(e+1, 1)**. **(2,5 puntos).**

$$\begin{cases} m=\dfrac{1-0}{e+1-2}=\dfrac{1}{e-1} \\ f'(x)=\dfrac{1}{x-1}\end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x-1}=\frac{1}{e-1}\Rightarrow x-1=e-1\Rightarrow x=e\Rightarrow$$

$$\begin{cases} f(e)=\ln(e-1) \\ f'(e)=\dfrac{1}{e-1}\end{cases} \Rightarrow y-\ln(e-1)=\frac{1}{e-1}(x-e)\Rightarrow (e-1)y-(e-1)\ln(e-1)=x-e\Rightarrow$$

$$(e-1)y=x-e+(e-1)\ln(e-1)\Rightarrow y=\frac{x}{(e-1)}-e+\ln(e-1)\Rightarrow x-(e-1)y-e+(e-1)\ln(e-1)$$

2.- Calcular las integrales indefinidas siguientes $a)\ \displaystyle\int\frac{dx}{(2x+1)^2+4}$ $\qquad b)\ \displaystyle\int x^2\left(x^3+1\right)^{-7}dx$

(2,5 puntos).

$$a)\quad \int\frac{dx}{(2x+1)^2+4}=\int\frac{\frac{dt}{2}}{t^2+4}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{4\frac{t^2}{4}+4}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{4\left(\frac{t^2}{4}+1\right)}=\frac{1}{8}\int\frac{dt}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1}=\frac{1}{8}\int\frac{2\,du}{u^2+1}=\frac{2}{8}\,arc\ tg\ u$$

$$2x+1=t\Rightarrow 2\,dx=dt\Rightarrow dx=\frac{dt}{2} \qquad\qquad \frac{t}{2}=u\Rightarrow\frac{dt}{2}=du\Rightarrow dt=2du$$

$$\int\frac{dx}{(2x+1)^2+4}=\frac{1}{4}\,arc\ tg\left(\frac{t}{2}\right)=\frac{1}{4}\,arc\ tg\left[\frac{(2x+1)}{2}\right]+K$$

$$b)\quad \int\left(x^3+1\right)^{-7}x^2dx=\int t^{-7}\frac{dt}{3}=\frac{1}{3}\int t^{-7}dt=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{-7+1}t^{-7+1}=-\frac{1}{18}\,t^{-6}=-\frac{1}{18}\left(x^3+1\right)^{-6}+K$$

$$x^3+1=t\Rightarrow 3x^2dx=dt\Rightarrow x^2dx=\frac{dt}{3}$$

3.- Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x - ay = -3 \\ 2x + ay - 5z = 13 \\ x + 3y - 2z = 5 \end{cases}$

a) Estudiar su compatibilidad para los distintos valores del parámetro **a**. **(1,5 puntos)**
b) Resolverlo para **a = 3**. **(1 punto)**

$$A = \begin{vmatrix} 3 & -a & 0 \\ 2 & a & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -a-9 & 6 \\ 0 & a-6 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -a-9 & 6 \\ a-6 & -1 \end{vmatrix} = a + 9 - 6\left(a - 6\right) = a + 9 - 6a + 36 = -5a + 45$$

$$Si\ A = 0 \Rightarrow -5a + 45 = 0 \Rightarrow -5\left(a - 9\right) = 0 \Rightarrow a - 9 = 0 \Rightarrow a = 9$$

$$\forall a \in \Re - \{9\} \Rightarrow A \neq 0 \Rightarrow rang\ \left(A\right) = 3 = Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$$Si\ a = 9$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -9 & 0 & -3 \\ 2 & 9 & -5 & 13 \\ 1 & 3 & -2 & 5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -18 & 6 & -18 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$rang\ \left(A\right) = rang\ \left(A/B\right) = 2 < Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$$

$$b) Si\ a = 3 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & -5 & 13 \\ 1 & 3 & -2 & 5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -12 & 6 & -18 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 10 & -30 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow 10z = -30 \Rightarrow z = -\frac{30}{10} = -3 \Rightarrow$$

$$-3y + 3 = 3 \Rightarrow -3y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x + 3 \cdot 0 - 2 \cdot \left(-3\right) = 5 \Rightarrow x + 6 = 5 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow$$

$$Solución \Rightarrow \left(x\ ,\ y\ ,\ z\right) = \left(-1\ ,\ 0\ ,\ -3\right)$$

4.- Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 3+\lambda \\ y = -1+2\lambda \\ z = 2+\lambda \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x+2y-1=0 \\ 3y-z+(2+m)=0 \end{cases}$ se pide:

a) Determinar si r y s son rectas paralelas. **(1 punto)**
b) Hallar el valor del parámetro m para que las rectas r y s estén contenidas en un mismo plano. **(1,5 puntos)**

a) Si son paralelas sus vectores directores serán iguales o proporcionales

$$x = 1-2y \Rightarrow 3y = z-(2+m) \Rightarrow y = \frac{z-(2+m)}{3} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 1-2\mu \\ y = -\dfrac{2+m}{3}+\dfrac{\mu}{3} \\ z = \mu \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_s} = \left(-2\,,\,\frac{1}{3}\,,1\right)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} \equiv (1\,,2\,,1) \\ \overrightarrow{v_s} \equiv (-6\,,1\,,3) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{-6} \neq \frac{2}{1} \Rightarrow \textit{No son paralelas}$$

b) El plano está determinado por los dos vectores directores y por el vector **SR**, donde **R** es un punto cualquiera de la recta r (tomaremos el indicado en su ecuación) y S es uno cualquiera de la recta s.(tomaremos, también el indicado en su ecuación). Como los tres son coplanarios y este último es combinación lineal de los otros dos, el determinante de la matriz que forman es nulo

$$\begin{cases} r \equiv \begin{cases} x = 3+\lambda \\ y = -1+2\lambda \\ z = 2+\lambda \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x = 1-6\mu \\ y = \dfrac{-(2+m)}{3}+\mu \\ z = 3\mu \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S\left(1\,,-\dfrac{(2+m)}{3}\,,0\right) \\ R(3\,,-1\,,2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} \equiv (1\,,2\,,1) \\ \overrightarrow{v_s} \equiv (-6\,,1\,,3) \\ \overrightarrow{SR} \equiv \left(1\,,-\dfrac{(2+m)}{3}\,,0\right)-(3\,,-1\,,2) \equiv \left(-2\,,-\dfrac{(2+m)}{3}+1\,,-2\right) \equiv \left(-2\,,\dfrac{-2-m+3}{3}\,,-2\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} \equiv (1\,,2\,,1) \\ \overrightarrow{v_s} \equiv (-6\,,1\,,3) \\ \overrightarrow{SR} \equiv \left(-2\,,\dfrac{1-m}{3}\,,-2\right) \equiv (-6\,,1-m\,,-6) \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -6 & 1 & 3 \\ -6 & 1-m & -6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 13 & 9 \\ 0 & 13-m & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 13 & 9 \\ 13-m & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 9\,(13-m) = 0 \Rightarrow 13-m = 0 \Rightarrow m = 13$$

OPCIÓN B

1.- Se considera la función $f(x)=\begin{cases} 2^x+a & si \quad x\le -1 \\ ax+b & si \quad -1<x\le 0 \\ 3x^2+2 & si \quad x>0 \end{cases}$

Determinar si existen valores de los parámetros **a** y **b** para los que **f(x)** sea derivable en todo ℝ. Justificar la respuesta. **(2,5 puntos)**

Para ser derivable la función tiene que ser, inicialmente, continua y después tener derivada igual en los puntos de discontinuidad

$$\begin{cases} \begin{cases} f(-1)=\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=2^{-1}+a=\dfrac{1}{2}+a \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=a\cdot(-1)+b=-a+b \end{cases} \Rightarrow f(-1)=\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)\Rightarrow \dfrac{1}{2}+a=-a+b\Rightarrow -2a+b=\dfrac{1}{2} \\ \begin{cases} f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=a\cdot 0+b=b \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=3\cdot 0^2+2=2 \end{cases} \Rightarrow f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\Rightarrow b=2 \end{cases}$$

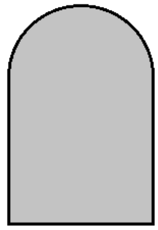
$$-2a+2=\frac{1}{2}\Rightarrow -2a=-2+\frac{1}{2}\Rightarrow -2a=-\frac{3}{2}\Rightarrow a=\frac{3}{4}$$

La función es continua para $a=\dfrac{3}{4}\ y\ b=2$.Veamos si la función es derivable para esos valores

$$f'(x)=\begin{cases} 2^x\ln 2 & si \quad x<-1 \\ \dfrac{3}{4} & si \quad -1<x<0 \\ 6x & si \quad x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f'(x)=2^{-1}\ln 2=\dfrac{\ln 2}{2} \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f'(x)=\dfrac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to -1^-} f'(x)\ne \lim\limits_{x\to -1^+} f'(x)\Rightarrow \dfrac{\ln 2}{2}\ne\dfrac{3}{4} \\ \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\dfrac{3}{4} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=6\cdot 0=0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)\ne \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)\Rightarrow \dfrac{3}{4}\ne 0 \end{cases}$$

No hay ningún valor de **a** y **b** que haga la función derivable

2.- La boca de un túnel tiene la forma de un rectángulo coronado por un semicírculo como se muestra en la figura. Encontrar las medidas del túnel que deje pasar más luz si el perímetro de la figura mide 5 metros.
(2,5 puntos)



Sera el que tenga **área máxima**
Siendo H la altura y R el radio del túnel

$$\left\{\begin{array}{c} 5 = 2H + 2R + \pi R = (H + 2 + \pi)\, R \Rightarrow 2H = 5 - 2R - \pi R \Rightarrow H = \dfrac{5 - 2R - \pi R}{2} \\ S = 2RH + \dfrac{\pi R^2}{2} = \dfrac{R}{2}(4H + \pi R) \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$S = \frac{R}{2}\left(4\frac{5 - 2R - \pi R}{2} + \pi R\right) = \frac{R}{2}[2\,(5 - 2R - \pi R) + \pi R] = \frac{R}{2}(10 - 4R - 2\pi R + \pi R) = \frac{R}{2}(10 - 4R - \pi R)$$

$$S' = \frac{dS}{dR} = \frac{1}{2}(10 - 4R - \pi R) + \frac{R}{2}(-4 - \pi) = 5 - 2R - \frac{\pi R}{2} - 2R - \frac{\pi R}{2} = 5 - 4R - \pi R \Rightarrow$$

$$S' = 0 \Rightarrow 5 - 4R - \pi R = 0 \Rightarrow 5 - R(4 + \pi) = 0 \Rightarrow R(4 + \pi) = 5 \Rightarrow R = \frac{5}{4 + \pi}$$

$$S'' = \frac{d^2S}{dR^2} = -4 - \pi < 0 \Rightarrow Máximo \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} R = \dfrac{5}{4 + \pi} \\ H = \dfrac{5 - 2 \cdot \dfrac{5}{4 + \pi} - \pi \dfrac{5}{4 + \pi}}{2} = \dfrac{20 + 5\pi - 10 - 5\pi}{2(4 + \pi)} = \dfrac{10}{2(4 + \pi)} = \dfrac{5}{4 + \pi} \end{array}\right.$$

3.- Dada las matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -k & 4 \\ 1 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 12 \end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores del parámetro k la matriz A tiene matriz inversa? **(1 punto)**
b) Hallar la matriz $\mathbf{A^{-1}}$ cuando **k** toma el valor **k = 1**. **(1,5 puntos)**

a) Una matriz tiene inversa siempre que su determinante no sea nulo

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -k & 4 \\ 1 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -k+2 & -20 \\ 0 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 12 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -k+2 & -20 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 5k - 10 + 40 = 5k + 30 = 5\,(k + 6) \Rightarrow$$

$$Si\ |A| = 0 \Rightarrow 5\,(k + 6) = 0 \Rightarrow k + 6 = 0 \Rightarrow k = -6$$

$$\forall k \in \Re - \{-6\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow Existe\ A^{-1}$$

b)

$$Siendo\ k=1 \Rightarrow |A| = 5\,(1+6) = 35 \neq 0 \Rightarrow Existe\ A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot adj\ A^t \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 4 & 7 & 12 \end{pmatrix}$$

$$adj\ A^t = \begin{pmatrix} 19 & 8 & -11 \\ -5 & 20 & -10 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{35} \cdot \begin{pmatrix} 19 & 8 & -11 \\ -5 & 20 & -10 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{35} & \frac{8}{35} & -\frac{11}{35} \\ -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{2}{35} & \frac{1}{35} & \frac{3}{35} \end{pmatrix}$$

4.- Sean r y s las rectas: $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = 3 \end{cases}$ y $s \equiv x-1 = y = z-3$. Calcular:

a) La ecuación del plano perpendicular a la recta **r** que pasa por el punto **(0,1,3)**. **(0,75 puntos)**
b) Las coordenadas del punto de intersección de ambas rectas. **(1 punto)**
c) La ecuación del plano π que contiene a las rectas **r** y **s**. **(0,75 puntos)**

a) El vector director del plano π es el de la recta **r** que es perpendicular al vector **PG**, siendo **P** el punto dado y **G** el punto genérico del plano. Ambos vectores son perpendiculares y su producto escalar es nulo y la ecuación del plano buscado

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (1\,,-1\,,0) \\ \overrightarrow{PG} = (x\,,y\,,z)-(0\,,1\,,3) = (x\,,y-1\,,z-3) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \perp \overrightarrow{PG} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{PG} = 0 \Rightarrow$$

$$(1\,,-1\,,0)\cdot(x\,,y-1\,,z-3) = 0 \Rightarrow \pi \equiv x-y+1 = 0$$

b) Puestas las dos rectas en paramétricas, e igualando sus coordenadas, si el sistema resultante es compatible determinado la solución Q es el punto buscado

$$\begin{cases} r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = 3 \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x = 1+\mu \\ y = \mu \\ z = 3+\mu \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1+\mu \\ 1-\lambda = \mu \\ 3 = 3+\mu \Rightarrow \mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1+0 = 1 \\ 1-\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \end{cases} \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Determinado$$

$$Q \begin{cases} x = 1+0 \\ y = 0 \\ z = 3+0 \end{cases} \Rightarrow Q(1\,,0\,,3)$$

Continuación del Problema 4 de la opción B

c) El plano α contiene los vectores de las dos rectas y el vector QG, siendo Q el punto de intersección hallado en a) y G el vector genérico del plano. Los tres vectores son coplanarios (están en el mismo plano) siendo combinación lineal una de las otras y el determinante de la matriz que forman es nulo.

$$\left\{\begin{array}{l} r\equiv\left\{\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=3 \end{array}\right. \\ s\equiv\left\{\begin{array}{l} x=1+\mu \\ y=\mu \\ z=3+\mu \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda=1+\mu \\ 1-\lambda=\mu \\ 3=3+\mu\Rightarrow\mu=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda=1+0=1 \\ 1-\lambda=0\Rightarrow\lambda=1 \end{array}\right. \Rightarrow \textit{Sistema Compatible Determinado}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{v_r}=(1,-1,0) \\ \overrightarrow{v_s}=(1,1,1) \\ \overrightarrow{QG}=(x,y,z)-(1,0,3)=(x-1,y,z-3) \end{array}\right. \Rightarrow \alpha\equiv\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ x-1 & y & z-3 \end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$z-3-(x-1)-y+z-3=0\Rightarrow -x+1-y+2z-6=0\Rightarrow \alpha\equiv x+y-2z+5=0$$